ΑΣΚΗΣΗ από τα προηγούμενα:

$\max 3x_1 + x_2$

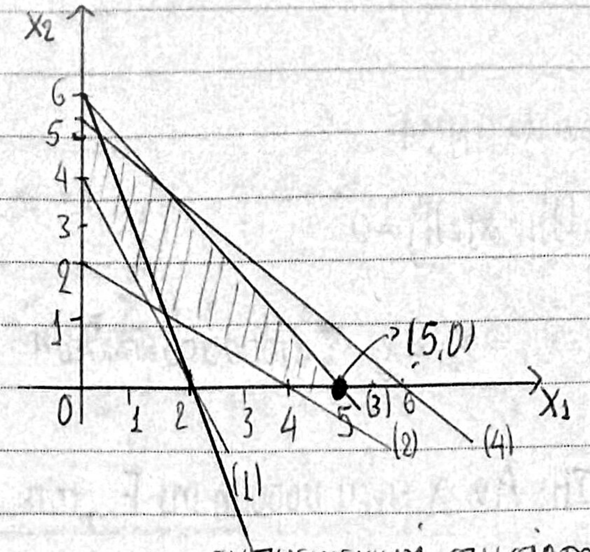
$6x_1 + 3x_2 \geq 12$ (1)

$4x_1 + 8x_2 \geq 16$ (2)

$6x_1 + 5x_2 \geq 30$ (3)

$6x_1 + 7x_2 \leq 36$ (4)

$x_1, x_2 \geq 0$



$3x_1 + x_2 = 6$

Επομένως το τελευταίο σημείο που βρίσκει η αντικειμένική συνάρτηση μετακινώντας την παράλληλα προς τα δεξιά μέχρι να ακουμπήσει τελευταία φορά την εφικτή περιοχή.

(5,0) άριστη λύση.

Μάθημα 3ο

13/03/17

Τυπική μορφή π γ π

i) Πρόβλημα μεγιστοποίησης

ii) Όλοι οι περιορισμοί εξισώσεις με μη αρνητικούς σταθερούς όρους

iii) Όλες οι μεταβλητές μη-αρνητικές

Άρα, έχω πρόβλημα της μορφής:

$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n,\ b_1, \ldots, b_m \geq 0$

$\vdots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Ή αλλιώς:

$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$

$A\underset{\sim}{x} = \tilde{b}$

$\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{b} \geq 0$

$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{P_1}x_1 + \underset{\sim}{P_2}x_2 + \cdots + \underset{\sim}{P_n}x_n = \underset{\sim}{b}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

$\min 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$x_1 + x_2 = 10$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$

Το κάνω όμως πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$-\max -(2x_1 + 3x_2 - 5x_3)$

$x_1 + x_2 = 10$

$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq 5$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$

$-\max -(2x_1 + 3x_2 - 5x_3)$

$x_1 + x_2 = 10$ $\qquad x_1 = x_1' - x_1''$

$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 5$ $\qquad x_1', x_1'' \geq 0$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 6$ $\qquad x_3 = -x_3'$

$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ \underbrace{x_4, x_5 \geq 0}.$ $\qquad x_3' \geq 0$

περιθώριες μεταβλητές, τις βάζω εγώ και όχι το πρόβλημα, για να κάνω ισότητες.

$-\max -(2(x_1' - x_1'')) + 3x_2 + 5x_3'$

χαλαρή αν προσθέσω
πλεονάζουσα αν αφαιρέσω

$x_1' - x_1'' + x_2 = 10$

$2(x_1' - x_1'') - 3x_2 + 4x_3' - x_4 = 5$

$7(x_1' - x_1'') - 4x_2 - x_3' + x_5 = 6$

$x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0$

↳ ώστε $x_3' \geq 0$. και όχι $x_3 \leq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 \xrightarrow{\text{το κάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης}} -\max -(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$

$x_1 + 2x_2 \leq 40$	$x_1 + 2x_2 \leq 40$
$x_1 - x_2 + x_3 = 30$	$x_1 - x_2 + x_3 = 30$
$x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -50$	$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50$
$x_2 + x_3 \geq 25$	$x_2 + x_3 \geq 25$
$x_1, x_2 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$	$x_1, x_2 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$.

$-\max(-(x_1+2x_2+3x_3))$

$x_1+2x_2+x_4=40$

$x_1-x_2+x_3=30$

$-x_1+3x_2+2x_3+x_5=50$

$x_2+x_3-x_6=25$

$x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\geq 0$

$x_3\in\mathbb{R}$

$-\max-(x_1+2x_2+x_3)$

$x_1+2x_2+x_4\leq 40$

$x_1-x_2+x_3'-x_3''=30$

$-x_1+3x_2+2(x_3'-x_3'')+x_5=50$

$x_2+x_3'-x_3''-x_6=25$

$x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5,x_6\geq 0.$

$x_3=x_3'-x_3''$ οποιοσδήποτε αριθμός στο $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο μη αρνητικών αριθμών.

ΑΣΚΗΣΗ:

$\min\{x_1+2x_2-x_3\}$

$x_1-x_2+x_3\geq -1$

$x_1-x_2\leq 5$

$x_1\leq 0,\ x_2\in\mathbb{R},\ x_3\geq 0$

$a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}^m$ (διανύσματα)

$\underset{\sim}{a}=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m,\ \lambda_i\in\mathbb{R},\ \underset{\sim}{a}\in\mathbb{R}^m,\ i=1,\ldots,m$ γραμμικός συνδυασμός

$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m=0.$

και $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ γρ. ανεξάρτητα

Αν έχω το σύστημα $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$

$r(A)=r(A:\underset{\sim}{b})$, $r(A)$ = βαθμίδα του πίνακα A. = βαθμίδα επαυξημένου $=r(A,b)$

$m<n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες αντιστοιχεί η βασική λύση.

$x_1\underset{\sim}{P_1}+x_2\underset{\sim}{P_2}+\cdots+x_m\underset{\sim}{P_m}=\underset{\sim}{b}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $n=4,\ m=2$

$\max 3x_1+5x_2-2x_3+x_4$

$x_1-x_2+x_3+x_4=5$

$2x_1+x_2+2x_3=1$

$x_i\geq 0\quad i=1,\ldots,4$

$b=(\underset{\sim}{P_3},\underset{\sim}{P_4})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

1) $x_1=x_2=0$

$x_3+x_4=5$

$2x_3=1 \Rightarrow x_3=\frac{1}{2},\ x_4=\frac{9}{2}$, $\underset{\sim}{x_B}=\left(x_3=\frac{1}{2},x_4=\frac{9}{2}\right)'$

2) $x_1 = x_3 = 0$

$\underset{\sim}{x}_B = (x_2 = 1, x_4 = 6)'$

3) $x_1 = x_4 = 0$

$\underset{\sim}{x}_B = (x_2 = -3, x_3 = 2)'$

4) $x_2 = x_3 = 0$

$\underset{\sim}{x}_B = (x_1 = 1/2, x_4 = 9/2)'$

5) $x_2 = x_4 = 0$

$B = (\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

6) $x_3 = x_4 = 0$

$\underset{\sim}{x}_B = (x_1 = 2, x_2 = -3)'$

Έχουμε βρει έτσι τις βασικές λύσεις.

$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$

$[\underset{\sim}{B}, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \underset{\sim}{b} \Rightarrow B\underset{\sim}{x}_B + N\underset{\sim}{x}_N = \underset{\sim}{b} \Rightarrow \underset{\sim}{x}_B = B^{-1}\underset{\sim}{b} - B^{-1}N\underset{\sim}{x}_N \Rightarrow \underset{\sim}{x}_B = B^{-1}\underset{\sim}{b}$

$\left[B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \right]$

από το παράδειγμα.

Βασική λύση: κάθε βασική λύση με όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές ονομάζεται **βασική εφικτή λύση**
Μια βασική εφικτή λύση που έχει μια τουλάχιστον από τις βασικές της μεταβλητές ίση με το μηδέν λέγεται **εκφυλισμένη** βασική λύση

ΘΕΩΡΗΜΑ: π.γ.π. $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$

$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$

$\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{b} \geq \underset{\sim}{0}$

$F \neq \emptyset$

Αν το F είναι φραγμένο τότε το π.γ.π. έχει άριστη λύση
F κλειστό σύνολο.
$x_n \in F$ κ.δ.ο. $\lim x_n \in F$

$\underset{\sim}{x_1} \geq 0 \Rightarrow \lim \underset{\sim}{x_n} \geq 0 \Rightarrow \underset{\sim}{x} \geq 0$

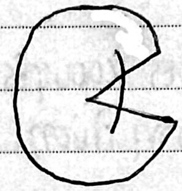
$A\underset{\sim}{x_n} = \underline{b} \quad \lim A\underset{\sim}{x_n} = b \Rightarrow A\underset{\sim}{x} = \underline{b}$

f κλειστό ή φραγμένο $\Rightarrow$ συμπαγές

$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$

$A\underset{\sim}{x} = b, \quad x, b \geq 0$

1) Κυρτός συνδυασμός των σημείων $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, ορίζεται κάθε σημείο της μορφής $\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$.



2) Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται **κυρτό** αν $\forall \underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2} \in K$, $0 < \lambda < 1$ ισχύει $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K$

3) Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου **K** είναι κάθε σημείο $\underset{\sim}{x}$ του K τέτοιο ώστε δεν υπάρχουν $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2} \in K$ και λ, $0 < \lambda < 1$ έτσι ώστε $\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x_1} + (1-\lambda) \underset{\sim}{x_2}$

4) Κυρτό πολύεδρο του $\mathbb{R}^n$ $\{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n, \underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$.

5) Τα ακρότατα σημεία ενός κυρτού πολυέδρου ή ενός κυρτού συνόλου όταν είναι πεπερασμένα σε πλήθος λέγονται **κορυφή**.

▶ Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο

Αν $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2} \in F$ τότε $\lambda_1 \underset{\sim}{x_1} + (1-\lambda) \underset{\sim}{x_2} \in F$

Αφού $x_1, x_2 \in F$ τότε

$\underset{\sim}{x_1} \geq 0$ και $\lambda_1 \underset{\sim}{x_1} + (1-\lambda) \underset{\sim}{x_2} \geq 0$.

$\underset{\sim}{x_2} \geq 0$ όπου $\lambda \in (0,1)$.

Υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$

Ημιεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m \gtrless b$

$A\underset{\sim}{x} = A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A \underset{\sim}{x_2} = \lambda \underline{b} + (1-\lambda) \underline{b} = \underline{b}$, $\underset{\sim}{x} \in F$

Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο.

Αν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο, τότε η άριστη λύση πετυχαίνεται σε ακρότατο σημείο (κορυφή) της F.

F: πεπερασμένος αριθμός κορυφών.

$x^* \in F$ σημείο που πετυχαίνεται μέγιστο.

$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, x_i κορυφή

$f(x^*) = c' x^* = c' \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c' x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \leq$ όπου $f(x_p) = \max\{f(x_i)\}$

$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_p) = f(x_p)$ $\quad x^* = x_p$

$f(x) \geq f(x_p)$

$f(x^*) \leq f(x_p)$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις τότε και κάθε κυρτός της συνδυασμός είναι άριστη λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$x_1, x_2, \ldots, x_r$, κορυφή r, $\quad Z = \max c' x = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, r$.

$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$,

$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c' x_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = Z$

$f(x_i) = c' x_i$, $i = 1, \ldots, r$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

- Αν x είναι β.ελ. τότε x είναι κορυφή της f

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: → το πολύ (αφού β.ελ.)

Αφού x β.ελ. k θετικές συντεταγμένες $(k \leq m)$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)'$

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ γρ. ανεξ. στήλες του A

Αν x όχι κορυφή τότε $\exists$ $x_1, x_2 \in F$, $x_1 \neq x_2$, $0 < \lambda < 1$,

έτσι ώστε $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

$x_1 = \lambda x_{11} + (1-\lambda) x_{12}$

$x_2 = \lambda x_{21} + (1-\lambda) x_{22}$

$x_3 = \lambda x_{31} + (1-\lambda) x_{32}$

$\ldots$

$x_k = \lambda x_{k1} + (1-\lambda) x_{k2}$

$0 = \lambda x_{k+1,1} + (1-\lambda) x_{k+1,2}$

$\ldots$

$0 = \lambda x_{n1} + (1-\lambda) x_{n2}$

αφού $x_1, x_2 \geq 0$, $0 < \lambda < 1$

$x_{j1} = x_{j2} = 0$, $j = k+1, \ldots, n$

$x_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{k1}, 0, \ldots, 0)'$

$x_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{k2}, 0, \ldots, 0)'$

$A x_1 = b$

$A x_2 = b$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} x_{j1} P_j = b \\ \\ \sum_{j=1}^{k} x_{j2} P_j = b \end{array}\right\}$$

αφαιρώ κατά μέλη.

$$\sum_{j=1}^{k} (x_{j1} - x_{j2}) P_j = 0$$

$x_{j1} = x_{j2} \Rightarrow x_1 = x_2$ άτοπο, από υπόθεση.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν x είναι κορυφή της F, τότε x είναι β.ε.λ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)'$, $k \leq n$

Θ.ν.δ. $P_1, P_2, \ldots, P_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Έστω ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν ώστε $\theta((\lambda P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k) = 0)$ (1)

$x \in F$

$x_1 P_1 + \cdots + x_k P_k = b$ (2)

$\theta \in \mathbb{R}$. Από τις (1), (2) έχω με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη:

$(x_1 + \theta\lambda_1) P_1 + \cdots + (x_k + \theta\lambda_k) P_k = b$, $x_i + \theta\lambda_i \geq 0$

$(x_1 - \theta\lambda_1) P_1 + \cdots + (x_k - \theta\lambda_k) P_k = b$ $x_i - \theta\lambda_i \geq 0$

οπότε: $x_1 = (x_1 + \theta\lambda_1, \ldots, x_k + \theta\lambda_k, 0, \ldots, 0)'$

$x_2 = (x_1 - \theta\lambda_1, \ldots, x_k - \theta\lambda_k, 0, \ldots, 0)'$

$x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$ που είναι άτοπο, γιατί το x είναι κορυφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

x_0: αρχική μη εκφυλισμένη β.ε.λ.

$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, 0, \ldots, 0)'$

$x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{m0} P_m = b$

$x_{10} c_1 + x_{20} c_2 + \cdots + x_{m0} c_m = z_0$

$x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \cdots + x_{mj} P_m = P_j$

$x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \cdots + x_{mj} c_m = z_j$

Κριτήριο για να είναι μια λύση άριστη είναι: Αν $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$ τότε η μη εκφυλισμένη β.ε.λ. x_0 είναι άριστη.

$\underset{\sim}{y_0} = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})'$ μια άλλη λύση

Αρκεί ν.δ.ο. $z_0 = \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x_0} \geq \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{y_0} = z_0^*$

Αφού $\underset{\sim}{y_0}$ λύση, άρα ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} P_j = \underset{\sim}{b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} P_i = \underset{\sim}{b}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij} = \underset{\sim}{b} \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{P_i \text{ γρ.}} \quad x_{i0} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij}$$

$$z_0 = \underset{\sim}{c}' \underset{\sim}{x_0} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} z_j, \quad z_j \geq c_i$$

Άρα, $z_0 = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} z_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_{j0} c_j = z_0^*$